DOI: 10.3969/J. ISSN. 1004 - 602X. 2012. 04. 009

关于 Smarandache 伪 5 倍数数列的两个渐进公式

王相元，郭靖杰

(延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000)

摘　要: 利用解析和初等的方法研究了 Smarandache 伪 5 倍数和第二类 Smarandache 伪 5 倍数列的均值性质，得出两个有意义的渐进公式.

关键词: Smaradache 伪 5 倍数数列; 均值; 渐进公式

中图分类号: O156.4　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1004 - 602X(2012) 04 - 0009 - 02

1　引言和结论

对任意一个正整数，如果将其各位数字进行置换(包括恒等置换) 后所得数字是 5 的倍数，那么这个数就为伪 5 倍数，例如: 0，5，15，51，52，102，… 就是伪 5 倍数，令表示所有伪 5 倍数的集合。如果一个数本身不是 5 的倍数，但经过若干次置换后成为 5 的倍数，这样的数称为第二类伪 5 倍数，令 Y 表示第二类伪 5 倍数. 在参考文献中，Smarandache 教授建议我们研究伪 5 倍数序列的性质。关于这一问题，文献 [2] 证明了

$$\sum_{\substack{n\in X\\ n\le x}} f(n) = \sum_{n\le x} f(n) + O\left(Mx^{\frac{\ln 8}{\ln 10}}\right),$$

这里 $f(n)$ 是任意的算术函数，且 $M = \max\{|f(n)|\}$。文献 [3] 证明了对任意的 $x \geq 1$，有渐进公式

$$\sum_{\substack{n\in Y\\ n\le x}} \frac{1}{n} = \frac{4}{5}\ln x + \frac{4\gamma + \ln 5}{5} - A + O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right),$$

其中 γ 表示 Euler 常数，A 是一个常数。本文利用解析方法研究了 $\frac{\varphi(n)}{n^2}$ 在集合 X 和集合 Y 上的均值，并得到了两个渐进公式，即证明了如下

定理 1　对任意实数 $x \geq 1$，有渐进公式

$$\sum_{\substack{n\in X\\ n\le x}} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{6\ln x}{\pi^2} + O(1),$$

其中 $\varphi(n)$ 为欧拉函数。

定理 2　对任意实数，有渐进公式

$$\sum_{\substack{n\in Y\\ n\le x}} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{144\ln x}{25\pi^2} + O(1).$$

2　几个引理

引理 1 [4]　对任意实数 $x \geq 1$，我们有

$$\sum_{n\le x}\varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\ln x)$$

引理 2　对任意实数 $x \geq 1$，有渐进公式

$$\sum^{n\le x} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{6\ln x}{\pi^2} + O(1)$$

证明　令 $\sum^{n\le x}\varphi(n) = A(x)$，$f(n) = \frac{1}{n^2}$，

由 Abel 恒等式可得

$$\sum_{n\le x}\frac{\varphi(n)}{n^2} = \left(\frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\ln x)\right)\frac{1}{x^2} + 1 + \int_1^x \left(\frac{3}{\pi^2}t^2 + O(t\ln t)\right)\frac{2}{t^3}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{\pi^2} + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) + 1 + \int_1^x \frac{6}{\pi^2 t}\mathrm{d}t + \int_1^x O\left(\frac{2\ln t}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{\pi^2} + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) + 1 + \frac{6}{\pi^2}\ln x + O\Big(2\Big(1 - \frac{\ln x}{x} -$$

收稿日期: 2012-07-12

基金项目: 陕西省教育厅科研计划资助项目(11JK0489)

作者简介: 王相元(1983—) ，女，陕西渭南人，延安大学在读硕士研究生。

$\frac{1}{x})\Big)$,

由于$\frac{\ln x}{x}<1,2\left(1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right)<2$，

$\frac{3}{\pi^2}+1$ 是常数，所以

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in z}}\frac{\varphi(n)}{n^2}=\frac{6\ln x}{\pi^2}+O(1)$$

这就证明了引理 2。

引理 3　对任意实数 $x\geqslant 1$，令表 Z 示所有十进制数字中各位数字为 1，2，3，4，6，7，8，9 的自然数的集合，那么有渐进公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in z}}\frac{\varphi(n)}{n^2}=B+O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right)。$$

证明　因为$\sum_{n\in z}\frac{\varphi(n)}{n^2}\leqslant\sum_{n\in z}\frac{1}{n}$，由参考文献[4]知级数$\sum_{n\in z}\frac{1}{n}$收敛，所以级数$\sum_{n\in z}\frac{\varphi(n)}{n^2}$收敛，令 B 表示该级数的值，又对任意 $x\geqslant 1$，设正整数 k 满足 $10^k\leqslant x\leqslant 10^{k+1}$，所以有

$$\sum_{\substack{n\in z\\ n\leqslant x}}\frac{\varphi(n)}{n^2}=\sum_{n\in z}\frac{\varphi(n)}{n^2}-\sum_{\substack{n\in z\\ n\leqslant x}}\frac{\varphi(n)}{n^2}$$

$$=B+O\left(\sum_{n\geqslant k}\frac{8^{n+1}}{10^n}\right)$$

$$=B+O\left(\frac{8^{k+1}}{10^k}\left(1+\frac{8}{10}+\frac{8^2}{10^2}+\cdots\right)\right)$$

$$=B+O\left(8\times 40\,\frac{8^{\ln x}}{x}\right)$$

$$=B+O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right)$$

这就证明了引理 3。

3　定理的证明

现在来完成定理 1 的证明，

$$\sum_{\substack{n\leqslant Z\\ n\leqslant x}}\frac{\varphi(n)}{n^2}=\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n)}{n^2}=\sum_{\substack{n\leqslant Z\\ n\leqslant x}}\frac{\varphi(n)}{n^2}$$

$$=\frac{6\ln x}{\pi^2}+O(1)-B-O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right)$$

$$=\frac{6\ln x}{\pi^2}+O(1)$$

这就证明了定理 1，利用同样的方法便可以证明定理 2。

参考文献:

[1] Smarandache F. Only problem not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publ House，1993.

[2] ZHAGN Wenpeng. Research on smarandache problems in number theory [C]. Phoenix，USA: Hexis，2004: 17 – 19.

[3] 李洁. 关于第二类 Smarandache 伪 5 倍数数列 [J]. 西北大学学报，2006，36(4): 517 – 518.

[4] Tom M Apostol. 解析数论导引 [M]. 西南师范大学出版社，1992.

[责任编辑　贺小林]

On Two Asymptotic Fomulas of Smarandache Pseudo – multiples Of 5 number Sequence

WANG Xiang – yuan，GUO Jing – jie

(College of Mathematical and Computer Science，Yan an University，Yan an 716000，China)

Abstract: The mean value properties of the Smarandache pseudo – multiples of 5 number sequence and the second Smarandache pseudo – multiples of 5 number sequence are studied and used by elementary and analytic method. Two interesting asymptotic formulas are given for them.

Key words: Smarandache pseudo – multiples of 5 number sequence; mean value; asymptotic formula